دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

خلاصه درس معادلات دیفرانسیل

(بر مبنای کتاب گاج)

تهیه و تنظیم : مصطفی رحیمی

E-MAIL: nce.rahimi@yahoo.com

بهار سال ۱۳۹۴

مقدمه :

خلاصه ای که پیش روی شماست، خلاصه درس معادلات دیفرانسیل انتشارات گاج چاپ ۱۳۹۲ می باشد. در این درس، فصول حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم اهمیت دو چندان دارند. دقت شود که فصل هایی

مانند لاپلاس و حل معادلات به روش سری ها، نیز در کنکور سوال دارند، ولی به نظر بنده ارزش علمی کمتری نسبت به دو فصل اول دارند. لذا سعی شود فصول ابتدایی این خلاصه، بیشتر خوانده شود.

در این جزوه سعی شده است که تمامی مطالب مهم درس معادلات دیفرانسیل، به خوبی گنجانده شود.

امید است که مورد رضایت مهندسین عزیز واقع شود ...

در مورد نحوه ی خواندن درس معادلات دیفرانسیل و توضیح بیشتر در مورد این درس، پی دی افی آماده گردیده که پیشنهاد می شود قبل از مطالعه این درس آن پی دی اف نیز مطالعه شود.

لطفا هرگونه انتقاد و پیشنهاد در مورد این جزوه را از طریق ایمیل **nce.rahimi@yahoo.com** با بنده در میان بگذارید.

به امید موفقیت شما مهندسین عزیز در کنکور کارشناسی ارشد

مصطفی رحیمی

رتبه ۳۴ کنکور کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران سال ۱۳۹۴

Mostafa Rahimi

معادلات دیفرانسیل پرتکلوری

تعریف مرتبه : بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله گویند .

تعریف درجه : بزرگترین توان مربوط به بالاترین مشتق می باشد .

معادله دیفرانسیل خطی :

اگر معادله دیفرانسیل شامل هیچ جمله غیرخطی از تابع و یا مشتقات آن نباشد ، آن را خطی گویند .
منظور جملات غیرخطی از متغیر مستقل مثل (x^2 ، $\sin x$ ، e^x) باعث غیرخطی شدن معادله نمی گردد .

جواب غیر عادی :

بعضی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی ممکن است دارای جواب باشند که از جواب عمومی آن حاصل نمی شود .

*** همیشه منحنی جواب غیرعادی ، بر منحنی سایر جواب ها (یک معادله دیفرانسیل) مماس است .

معادلات مرتبه اول :

1) تفکیک پذیر :

در این گونه معادلات در نهایت به صورت تفکیک شده درمی آید و انتگرال می گیریم .

نکته : معادلات به صورت $y'=f(ax+by+c)$ را می توان با تغییر متغیر $u=ax+by+c$ به معادله تفکیک پذیر تبدیل نمود .

$$y'=\sin^2(x-y+1) \Rightarrow x-y+1=u \Rightarrow u'=\dots$$

2) معادلات مرتبه اول با ضرایب همگن :

تابع $z=f(x,y)$ را همگن از درجه (یا از مرتبه) k گوییم اگر داشته باشیم : $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$

صورت معادله به شکل روبرو است :

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

با تغییر متغیر $u=y/x$ ← تبدیل به تفکیک پذیر

نکته : معادلاتی به شکل $y'=f\left(\dfrac{ax+by}{a_2x+b_2y}\right)$ همگن می باشند و با $u=y/x$ ← تفکیک پذیر

*** y_1 و y_2 مستقل خطی هستند هرگاه نسبت $\frac{y_1}{y_2}$ عدد ثابت نشود .

اگر رونسکین چند تابع فقط صفر نشود ، آنگاه آن توابع مستقل خطی هستند . ولی اگر رونسکین صفر شود ، نمی توان نتیجه گرفت که آن توابع حتماً وابسته خطی اند .

Subject:

Date: No:

نکته ② معادلات $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ همگن نبوده و برای حل آن حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ یعنی دو خط با هم موازی باشند با فرض $u=a_1x+b_1y+c_1$ یا $u=a_2x+b_2y+c_2$ ← تفکیک پذیر

ب) اگر $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ← دو خط متقاطع‌اند ← نقطه تلاقی را پیدا می‌کنیم ← (x_0, y_0) نقطه تلاقی

با تغییر متغیر $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ ← تبدیل به معادله همگن $\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل:

معادله‌ای را در نظر بگیرید $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$

شرط لازم و کافی برای کامل بودن ← $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

اگر کامل بود طبق روش زیر معادله را حل می‌کنیم. $du = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \longrightarrow \boxed{u(x,y)=C}$$

جواب عمومی معادله

تابع پتانسیل

معادلات غیرکامل مرتبه اول عامل انتگرال‌ساز:

اگر در معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ← $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ ← معادله غیرکامل

پس در این شرایط با ضرب تابعی به صورت $M=M(x,y)$ در معادله، به معادله‌ای کامل تبدیل می‌شود.

قضیه: اگر تابع $M(S)$، $S=S(x,y)$ عامل انتگرال‌ساز برای معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ باشد،

جایی که عبارت $f(S)=\frac{P_y-Q_x}{S_xQ-S_yP}$ تنها تابعی از S باشد داریم: $M(S)=e^{\int f(S)\,dx}$

PONIX NOTE BOOK

Subject:

Date: . . No:

روابط مهم:

۱) اگر $\frac{P_y-Q_x}{Q}=f(x) \longrightarrow \mu(x)=e^{\int f(x)dx}$

۲) اگر $\frac{P_y-Q_x}{-P}=f(y) \longrightarrow \mu(y)=e^{\int f(y)dy}$

۳) اگر $\frac{P_y-Q_x}{yQ-xP}=f(xy)$ و با فرض $s=xy \longrightarrow \mu(s)=e^{\int f(s)ds}$

۴) اگر معادله دیفرانسیل را بتوان به صورت $yP(xy)dx+xQ(xy)dy=0$ نوشت، آنگاه داریم

$\mu(x,y)=\frac{1}{xy(P-Q)}$ عامل انتگرال ساز خواهد بود.

تذکر: برای یافتن عامل انتگرال سازی به صورت $\mu=x^{\alpha}y^{\beta}$ باید آن را در طرفین معادله $Pdx+Qdy=0$ ضرب نمود و با اعمال شرایط کامل بودن مقادیر α و β را یافت.

تذکر 2: اگر یک عامل انتگرال ساز برای یک معادله موجود باشد، آنگاه بی‌نهایت عامل انتگرال ساز دیگر نیز برای آن معادله وجود خواهد داشت.

مشتقات مهم:

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2} \qquad d\left(tg^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$d\left[\ln(x^2+y^2)\right]=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d}{dx}Cotg\,u=-u'(1+Cotg^2u)=-u'csc^2u$$

$$\frac{d}{dx}Sec\,u=u'Sec\,u\,tg\,u \qquad \frac{d}{dx}csc\,u=-u'csc\,u\,Cotg\,u$$

PONIX Note Book

No:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}u = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}tg^{-1}u = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}cotg^{-1}u = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{u'}{u\ln a} = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$\frac{d}{dx}\sinh u = u'\cosh u$$

$$\frac{d}{dx}\cosh u = u'\sinh u$$

$$\frac{d}{dx}tgh\,u = u'(1-tgh^2u) = u'\operatorname{sech}^2u$$

$$\frac{d}{dx}\coth u = u'(1-\coth^2u) = -u'\operatorname{csch}^2u$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}u = -u'\operatorname{sech}u\,tgh\,u$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}u = -u'\operatorname{csch}u\,cotg\,u$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}u = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}tgh^{-1}u = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\frac{d}{dx}cotgh^{-1}u = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$$

$$\sqrt[n]{u^m} = u^{m/n} \Rightarrow \frac{d}{dx}\sqrt[n]{u^m} = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

Subject:

Date: . . No:

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی:

شکل آن به صورت روبرو است:

$$y' + P(x)\,y = R(x)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \left\{ \int R(x)\,\mu(x)\,dx + C \right\}} \xrightarrow{\text{چرا}}$$

عامل انتگرال ساز $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

نکته: هرگاه معادله دیفرانسیلی به صورت $y'g'(y) + g(y)\,p(x) = R(x)$ باشد، با توجه به اینکه مشتق $g(y)$ یعنی $y'g'(y)$ در معادله است ← تغییر متغیر $z = g(y)$ ← تبدیل به معادله اول خطی برای z

$$[(z = g(y) \Rightarrow z' = y'g'(y))] \Rightarrow z' + P(x)\,z = R(x)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول برنولی:

معادله آن به صورت روبرو است:

$$y' + P(x)\,y = R(x)\,y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

با تغییر متغیر ← $u = y^{1-\alpha}$ ← تبدیل به مرتبه اول خطی می‌شود.

عامل انتگرال به صورت روبرو دارد: $\mu(x,y) = e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}$

دو راه حل

معادله مرتبه اول ریکاتی:

به شکل روبرو است:

$$y' + P(x)\,y = R(x)\,y^2 + S(x)$$

این معادله غیرخطی است. برای حل معادله ریکاتی باید یک جواب آن $y = \phi(x)$ حتماً داشته باشیم.

با فرض $y = \phi(x) + u(x)$ ← به یک معادله برنولی می‌رسیم.

Subject:

Date: . . No:

معادلات به شکل $y=f(x,y')$:

با فرض $y'=P$ ← از طرفین معادله مشتق نسبت به x گرفته و به معادله $g(x,P,\frac{dP}{dx})=0$ می‌رسیم

جواب عمومی، از حذف P در دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y=f(x,P) \\ g(x,P,\frac{dP}{dx}) \end{cases}$$

$\boxed{EXP}$ $4y=8xy'+8x^2+y'^2 \longrightarrow y'=P \longrightarrow 4y=8xP+8x^2+P^2$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 4P=8P+8x\frac{dP}{dx}+16x+2P\frac{dP}{dx} \Rightarrow (P+4x)(4+2\frac{dP}{dx})=$

$$\begin{cases} P+4x=0 \\ 4+2\frac{dP}{dx}=0 \end{cases}$$

معادلات به شکل $x=f(y,y')$:

با فرض $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}$ از طرفین معادله $x=f(y,P)$ مشتق نسبت به y گرفته و به معادله $g(y,P,\frac{dP}{dy})=0$

$$\begin{cases} x=f(y,P) \\ g(y,P,\frac{dP}{dy})=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{جواب عمومی}$$

معادلات فاقد متغیر وابسته ← $f(x,y')=0$:

اگر $x=h(y')$ قابل حل باشد ← با فرض $y'=P$ ←

$x=h(P) \Rightarrow dx=h'(P)dP \rightsquigarrow dy=Pdx \rightsquigarrow \frac{dy}{P}=h'(P)dP \rightsquigarrow$ تفکیک‌پذیر

$\boxed{EXP}$ $x=2y'+\ln y' \rightsquigarrow x=2P+\ln P \Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{1/P}=2\frac{dP}{dy}-\frac{dP}{dy}\sin P$

$\Rightarrow P^2+P\ln P-\sin P=y+C \rightsquigarrow \begin{cases} y=P^2+P\ln P-\sin P+C \\ x=2P+\ln P \end{cases}$

معادلات فاقد متغیر مستقل : $f(y,y')=0$:

$y=h(P) \Rightarrow dy=h'(P)dP \rightsquigarrow Pdx=h'(P)dP \Rightarrow dx=\frac{h'(P)}{P}dP$

معادلات فاقد متغیر مستقل و وابسته : $f(y')=0$:

در صورت وجود یک جواب حقیقی $y'=k$ (به صورت $f(k)=0$) :

$y'=k \Rightarrow y=kx+C \Rightarrow k=(\frac{y-C}{x})$

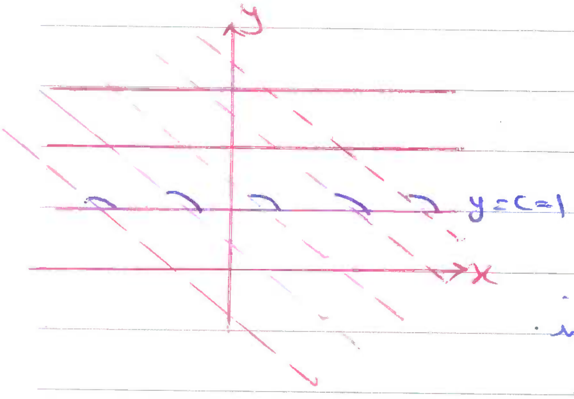
جواب عمومی $\rightsquigarrow f(\frac{y-C}{x})=0$

PONIX NOTE BOOK

Subject:
Date: No:

رویکرد هندسی در ترکیب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

۱) مسیرهای هم زاویه :



دو دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ و $g(x,y,c)=0$ را مسیرهای هم زاویه یکدیگر گوییم، هرگاه هر عضو از یک دسته تمام اعضا از دسته منحنی دیگر را با زاویه ای یکسان قطع کند.
مثلاً منحنی های $y=c$ مسیرهای هم زاویه دسته منحنی $x+y=k$ هستند.

تانژانت زاویه ی بین دو منحنی ← $tg\alpha = \dfrac{m-m'}{1+mm'}$

روش به دست آوردن مسیرهای هم زاویه دو منحنی :

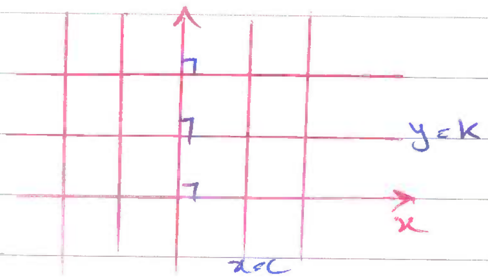
۱) با مشتق گیری $f(x,y,c)=0$ نسبت به x و حذف ثابت c، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن را پیدا می کنیم و آن را به صورت $y'=m(x,y)$ می نویسیم. $m(x,y)$ بیان کننده شیب منحنی ها در نقطه (x,y) است.

۲) چون قرار است منحنی هایی را پیدا کنیم که $f(x,y,c)=0$ را با زاویه α قطع کند از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$tg\alpha = \frac{m(x,y)-y'}{1+m(x,y)\cdot y'}$$

$m(x,y)$ ← شیب منحنی $f(x,y,c)=0$
مخرج ← این را حل می کنیم و جواب ها مسیر است.

۲) مسیرهای قائم (متعامد) :



دو دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ و $g(x,y,c)=0$ را مسیرهای قائم یکدیگر گوییم، هرگاه هر عضو از یک دسته بر تمام اعضا از دسته منحنی دیگر عمود باشد.

روش به دست آوردن مسیرهای قائم دو منحنی :

ابتدا $f(x,y,c)=0$ را با حذف ثابت c، معادله مسیرهای داده شده و مشتق آن نسبت به x به شکل $\phi(x,y,y')=0$ پیدا کرده سپس y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل می نماییم. رابطه حاصله که به صورت $\phi(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ می باشد ← حل می کنیم تا مسیر قائم به دست آید.

Subject:

Date: No:

نکته مهم: اگر مسیرهای قائم در مختصات قطبی مدنظر باشد ابتدا معادله دیفرانسیل مسیرهای داده شده را با حذف ثابت c میان معادله مسیرهای داده شده و مشتق آن نسبت به متغیر θ، به شکل $\Phi(r, \theta, r')=0$ پیدا کرده، سپس (r') را به $-\frac{r^2}{r'}$ تبدیل می‌کنیم. $\left(r'=\frac{dr}{d\theta}\right)$

معادله حل $\Phi\left(r, \theta, \frac{r^2}{r'}\right)=0$

نکته: در نظریه مغناطیس، سیالات، هیدرودینامیک، خطوط جریان، خطوط هم پتانسیل، انتقال حرارت، خطوط جریان گرما، خطوط هم دما مسیرهای قائم یکدیگر می‌باشند که با داشتن یکی از آن‌ها، دیگری نیز به دست می‌آید.

پوشش و جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل:

دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ را در نظر بگیرید. پوشش این دسته منحنی، تابعی است مانند $y=y(x)$ که می‌باشد بر همه‌ی اعضای این دسته منحنی (به ازای هر c) مماس است. برای به دست آوردن معادله پوش $y=y(x)$ کافی است پارامتر c را از دستگاه زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ f_c(x,y,c)=0 \end{cases} \longrightarrow \text{مشتق } f(x,y,c)=0 \text{ نسبت به } c$$

Subject: فصل دوم : معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم :

Date: No:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$ ← شکل معادله مرتبه دوم خطی

اگر $R(x)=0$ ← همگن

نکته: توابع $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... ، $y_n(x)$ نسبت به یکدیگر مستقل خطی هستند هرگاه هیچ ترکیب خطی از آنها که به صورت $k_1y_1 + k_2y_2 + \dots + k_ny_n$ نشان داده می‌شود، برابر با صفر نشود (به شرط آنکه k_i ها همه با هم صفر نباشند). در غیر این صورت ← وابسته خطی

نکته مهم: توابع y_1 ، y_2 ، ... ، y_n که پایه‌های جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n می‌باشند نسبت به هم مستقل خطی هستند هرگاه دترمینان زیر که به آن رونسکین می‌گوییم، مخالف صفر باشد

رونسکین: $$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

اگر $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ دو تابع مستقل خطی از یکدیگر باشند که در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ صدق کنند (یعنی پایه‌های جواب این معادله باشند) آنگاه جواب عمومی این معادله از ترکیب خطی y_1 و y_2 حاصل می‌شود

جواب عمومی $\longrightarrow y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

یافتن پایه‌های جواب برای معادلات همگن با ضرایب ثابت:

شکل معادله $\longrightarrow ay'' + by' + cy = 0$

تبدیل
$$\begin{cases} y \to 1 \\ y' \to m \\ y'' \to m^2 \end{cases}$$

$$am^2 + bm + c = 0$$

تبدیل به معادله مفسر (مشخصه)

Subject:

Date: . . No:

درمعادله مشخصه ←

اگر دو ریشه حقیقی داشت: $y_1(x)=e^{m_1x}$ $\quad y_2(x)=e^{m_2x}$ $\rightarrow$ $\boxed{y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}}$

اگر ریشه مضاعف داشت: $y_1(x)=e^{m_1x}\ ,\ y_2(x)=xe^{m_1x}$ $\rightarrow$ $\boxed{y=C_1e^{m_1x}+C_2xe^{m_1x}}$

اگر ریشه مختلط بود $\alpha\pm i\beta$: $y_1(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x\ ,\ y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$

$$\boxed{y=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right)}$$

نکته: درمعادله دیفرانسیل $ay''+by'+cy=0$ که دارای معادله مشخصه $am^2+bm+c=0$ با ریشه های m_1 و m_2 می باشد، شرط آنکه جواب معادله دیفرانسیل میرا باشد، یا به عبارتی حاصل حد $\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}\right)$ برابر با صفر باشد، آن است که هر دو ریشه m_1 و m_2 منفی باشد.

یعنی $\rightarrow$ $m_1+m_2<0$ و $m_1m_2>0$ $\Rightarrow$ $-\frac{b}{a}<0$ و $c/a>0$

یافتن پایه های جواب برای معادله همگن با ضرایب متغیر کوشی اویلر

شکل معادله: $ax^2y''+bxy'+cy=0$ $\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}$ $x=e^t$ یا $t=\ln x$

تبدیل می شود به $\rightarrow$ $a\ddot{y}+(b-a)\dot{y}+cy=0$ $\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}}$ $\boxed{am^2+(b-a)m+c=0}$

یعنی: $y\to1$, $xy'\to m$, $x^2y''\to m(m-1)$

اگر دو ریشه حقیقی داشت: $y_1=x^{m_1}\ ,\ y_2=x^{m_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}}$

اگر ریشه مضاعف داشت: $y_1=x^{m_1}\ ,\ y_2=x^{m_1}\ln x$

$$\boxed{y=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_1}\ln x}$$

Subject: Mostafa Rahimi
Date: . . No:

$\alpha \pm i\beta$ اگر ریشه مختلط بود ⟵ $y_1 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$ و $y_2 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$

$$\boxed{y = x^{\alpha}\left[C_1 \sin(\beta \ln x) + C_2 \cos(\beta \ln x)\right]}$$

نکته: در معادله ی مشخصه ی کوشی اویلر داریم: $am^2 + (b-a)m + c = 0$ از آنجایی که جواب معادله کوشی اویلر به صورت $y = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$ می باشد، شرط آنکه $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} (C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2})$ مساوی صفر باشد، آن است که m_1 و m_2 هر دو مثبت باشند یعنی:

$$\frac{-(b-a)}{a} > 0 \quad , \quad \frac{c}{a} > 0$$

نکته: اگر معادله کوشی اویلر را برای مراتب بالاتر مثلاً درجه 9 داشته باشیم:

$ax^9 y^{(9)} + \dots + bxy' + cy = 0 \longrightarrow m(m-1)(m-2)\dots(m-8)$

$3, 3, 3, 5\pm 2i, 5\pm 2i, 2\pm 3i$ ⟵ ریشه ها

ریشه معادله مشخصه		پایه های جواب
$m_1 = 3$	$\longrightarrow$	$y_1 = x^3$
$m_2 = 3$	تکرار اول $\longrightarrow$	$y_2 = x^3 . \ln x$
$m_3 = 3$	تکرار دوم $\longrightarrow$	$y_2 = x^3 . (\ln x)^2$
$m_{4,5} = 5 \pm 2i$	$\longrightarrow$	$y_4 = x^5 \sin(2\ln x)$, $y_5 = x^5 \cos(2\ln x)$
$m_{6,7} = 5 \pm 2i$	تکرار اول $\longrightarrow$	$y_6 = (\ln x) x^5 \sin(2\ln x)$, $y_7 = (\ln x) . x^5 \cos(2\ln x)$
$m_{8,9} = 2 \pm 3i$	$\longrightarrow$	$y_8 = x^2 \sin(3\ln x)$, $y_9 = x^2 \cos(3\ln x)$

نکته فرعی: اگر مجموع ضرایب y و y' و y'' صفر باشد حتماً یکی از پایه های جواب e^x است.

EXP $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ ⟵ مجموع ضرایب $= 0$ ⟵ یک از جوابها $y = e^x$

نکته: در کوشی اویلر با تغییر متغیر $x = e^t$ به معادله با ضرایب ثابت خواهیم رسید.

PONIX NOTE BOOK

Subject:

Date: . . No:

معادلات مرتبه دوم ناهمگن و روش‌های یافتن جواب خصوصی:

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x) \longrightarrow y = y_h(x) + y_p(x)$$

جواب عمومی معادله ناهمگن

جوابی بخصوص از معادله فوق

جواب عمومی معادله همگن متناظر آن

۱) روش ضرایب نامعین:

از این روش برای یافتن جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده می‌شود

$$ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \cdots + cy = R(x)$$

مراحل حل:

۱) ابتدا معادله دیفرانسیل همگن نظیر را تشکیل داده و پایه‌های جواب آن را پیدا می‌کنیم.

۲) پس شکل کلی و کامل شده $R(x)$ را به عنوان جواب خصوصی حدس می‌زنیم. (حدس اولیه)

برای این کار:

- اگر $R(x)$ به صورت یک چند جمله‌ای از درجه k برای x باشد جواب خصوصی نیز یک چند جمله‌ای (شامل تمام توان‌های x) از درجه k خواهد بود ← اگر $R(x)=x^2$ ← $y_p = Ax^2+Bx+C$
- اگر $R(x)$ به صورت نمایی باشد، جواب خصوصی نیز نمایی است $R(x)=e^{\alpha x}$ ← $y_p = Ae^{\alpha x}$
- اگر $R(x) = \sin\beta x$ ← $y_p = A\sin\beta x + B\cos\beta x$
- اگر $R(x) = e^{\alpha x}[R_1(x)\sin\beta x + R_2(x)\cos\beta x]$ ←

$$y_p = e^{\alpha x}[F(x)\sin\beta x + G(x)\cos\beta x]$$

۳) پس از حدس اولیه جواب خصوصی به صورت فوق، اگر هر یک از جملات این جواب خصوصی با یکی از پایه‌های جواب بدست آمده در مرحله ۱، وابستگی خطی داشت، جواب خصوصی را در x ضرب می‌کنیم. در صورت لزوم این مرحله را آنقدر تکرار می‌کنیم تا دیگر هیچ وابستگی خطی میان جملات جواب خصوصی و پایه‌های جواب معادله همگن وجود نداشته باشد.

مثال ← پایه‌های جواب ← $e^{2x}\sin 3x\,,\ e^{2x}\cos 3x$

جواب خصوصی (حدس اولیه) ← $e^{2x}[(Ax+B)\sin 3x + (Cx+D)\cos 3x]$

وابستگی خطی دارند ←

جواب خصوصی ← $y_p = xe^{2x}[(Ax+B)\sin 3x + (Cx+D)\cos 3x]$

PANIX Note Book

Subject:

Date: No:

نکته مهم ۵: روش ضرایب نامعین تنها برای معادلات خطی با ضرایب ثابت (در حالتی که جمله ناهمگن به صورت سینوسی با آرگومان خطی ($\sin\beta x$ یا $\cos\beta x$)، نمایی با آرگومان خطی ($e^{\alpha x}$)، چندجمله‌ای و یا حاصل ضرب از آن‌ها باشد) اعتبار دارد. حتی در حالتی که $\frac{1}{\text{چندجمله‌ای}}$ یا $e^{\alpha x^2}$ یا $\sin\beta x^2$، $R(x)$ باشد، نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

$$A\sin x + B\cos x = C\sin(x+\phi)$$

نکته مهم ۶

$$C=\sqrt{A^2+B^2}\ ,\quad \phi = tg^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

Caution: در یک معادله دیفرانسیل خطی، اگر $R(x)$ شامل مجموع چند عبارت باشد ($R(x) = R_1(x)+R_2(x)+\dots$) می‌توان برای تک تک آن عبارت‌ها جواب خصوصی را جداگانه به دست آورد و در نهایت با هم جمع نمود تا جواب خصوصی کل پیدا شود.

۲) روش اپراتور معکوس:

این روش نیز تنها برای یافتن جواب خصوصی معادلات خطی با ضرایب ثابت به کار می‌رود.

برای سهولت در نوشتن، با تعریف $D=\frac{d}{dx}$ به عنوان اپراتور (عملگر) مشتق‌گیری می‌توان نوشت:

$$y' = \frac{d}{dx}y = Dy\ ,\quad y''=\frac{d^2}{dx^2}y = D^2y\ ,\ \dots\ ,\quad y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}y = D^n y$$

بدین ترتیب معادله دیفرانسیل $ay^{(n)}+by^{(n-1)}+\dots+cy=R(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(aD^n+bD^{n-1}+\dots+c)\,y = R(x)$$

جواب خصوصی

$$y_p = \frac{1}{aD^n+bD^{n-1}+\dots+c}\{R(x)\} = \frac{1}{F(D)}\{R(x)\}$$

مثال: $y'-ay=R(x) \longrightarrow (D-a)y = R(x)$

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{ax}\int R(x)e^{-ax}\,dx \\ y &= \frac{1}{D-a}\{R(x)\}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{D-a}R(x) = e^{ax}\int Re^{-ax}\,dx}$$

PONIX Note Book

روابط مهم:

$$\frac{1}{F(D)}\{k_1R_1(x)+k_2R_2(x)\} = k_1\frac{1}{F(D)}\{R_1(x)\}+k_2\frac{1}{F(D)}\{R_2(x)\}$$

$$2)\quad \frac{1}{F(D)}\{e^{\alpha x}R(x)\} = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\{R(x)\}$$

$$3)\quad \frac{1}{F(D)}\{ke^{\alpha x}\} = ke^{\alpha x}\cdot\frac{1}{F(\alpha)}$$

ثابت k

$$4)\quad \frac{1}{F(D)}\{xR(x)\} = x\cdot\frac{1}{F(D)}\{R(x)\}-\frac{F'(D)}{(F(D))^2}\cdot\{R(x)\}$$

$$5)\quad \frac{1}{F(D^2)}\{\sin\beta x\} = \sin\beta x\cdot\frac{1}{F(-\beta^2)}$$

$\cos\beta x$ هم درست است.

نکته مهم: در محاسبه عبارت $y_p=\frac{1}{F(D)}\sin\beta x$ ابتدا در تابع $F(D)$ به جای D^2 ها قرار می‌دهیم: $-\beta^2$

اگر در انجام این کار، دیگر D در مخرج کسر باقی نماند جواب خصوصی مورد نظر حاصل شده است. اما اگر پس از انجام این کار به یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت $aD+b$ در مخرج رسیدیم، با ضرب صورت و مخرج کسر $\frac{1}{aD+b}$ در مزدوج این چندجمله‌ای مجدداً در مخرج کسر D^2 ظاهر می‌گردد تا با $-\beta^2$ جایگزین می‌شود. بنابراین دیگر D در مخرج باقی نمی‌ماند.

$$\boxed{(aD-b)\sin\beta x = a\frac{d}{dx}(\sin\beta x)-b\sin\beta x = a\beta\cos\beta x-b\sin\beta x}$$

چنانچه در محاسبه $\frac{1}{F(D)}\{e^{\alpha x}, \sin\beta x, \cos\beta x\}$ با قرار دادن α به جای D ($-\beta^2$ به جای D^2) در تابع $F(D)$، مخرج کسر صفر شود، نمی‌توان مستقیماً α (یا $-\beta^2$) را در $F(D)$ جایگزین نمود. در این شرایط به جای $F(D)$ مشتق آن یعنی $F'(D)$ را در مخرج کسر قرار داده و α (یا $-\beta^2$) را در $F'(D)$ جایگزین می‌نماییم و در نهایت حاصل کسر را در x ضرب می‌کنیم.

اگر پس از انجام این کار باز هم مخرج کسر صفر شد، روال مذکور را مجدداً تکرار می‌کنیم یعنی از مخرج دوباره مشتق گرفته و یک بار دیگر حاصل را در x ضرب می‌کنیم. این روال را تا زمانی ادامه می‌دهیم که دیگر مخرج کسر صفر نگردد.

Subject:

Date: No:

نکته: عبارت {یک چندجمله‌ای از درجه k : $R(x)$} $y_p = \frac{1}{F(D)} \cdot$ را در نظر بگیرید. برای محاسبه این عبارت ابتدا $F(D)$ را برحسب توان های صعودی D مرتب کرده و سپس تقسیم زیر را مانند تقسیم چندجمله‌ای ها انجام می‌دهیم:

$F(D)$: به طور صعودی مرتب شده

1	$F(D)$: به طور صعودی مرتب شده
	خارج قسمت

$\rightarrow y_p = (\text{خارج قسمت}) \cdot \{R(x)\}$

تقسیم مهم:

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - + \dots \qquad \frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + \dots$$

3) روش پارامترهای متغیر (لاگرانژ):

این روش دارای محدودیت نبوده و وقتی در معادلات با ضرایب متغیر با مرحله با ... قابل استفاده می‌باشد.

معادله رو به رو را در نظر بگیرید $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ ← جواب خصوصی زیر را دارد:

جواب خصوصی: $\boxed{y_p = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \int \frac{y_1 R}{W} dx & \int \frac{y_2 R}{W} dx \end{vmatrix}}$ منظور $R(x)$ است.

رونسکین $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

y_1 و y_2 پایه های جواب معادله دیفرانسیل همگن هستند

← یعنی $R(x)=0$ قرار می‌دهیم و معادله مشخصه را حل می‌کنیم y_1 و y_2 به دست می‌آید.

نکته مهم: اگر توابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی از معادله ناهمگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ باشند آنگاه تفاضل آن ها، $y_2 - y_1$، در معادله همگن متناظر یعنی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ صدق می‌کند.

نکته: شرط متناوب بودن جواب معادله همگن آن است که ریشه های معادله مشخصه موهومی محض باشد

$m^2 + am + k = 0$

رونسکین $\rightarrow \boxed{W(x) = ce^{-\int p(x)dx}}$

No:

روش‌های کاهش مرتبه در حل معادلات دیفرانسیل (خطی و غیرخطی):

حالت اول: معادله فاقد تابع باشد:

اگر معادله دیفرانسیل فاقد تابع y باشد، یعنی به صورت $F(x, y', y'')=0$ نوشته شود، آنگاه می‌توان فرض $y' = \frac{dy}{dx} = u$ و در نتیجه $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را به مرتبه اول تبدیل نمود.

حالت دوم: معادله فاقد متغیر باشد:

اگر معادله دیفرانسیل فاقد متغیر x باشد، یعنی به صورت $F(y, y', y'')=0$ بیان شود، آنگاه فرض می‌کنیم $y' = \frac{dy}{dx} = u$ و y'' را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(u) \longrightarrow \boxed{\frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u}$$ تبدیل به معادله مرتبه اول

* در مواردی که معادله فاقد x و y است، استفاده از حالت اول بهتر است.

حالت سوم: معادله‌ای که یک پاسخ جواب آن معلوم باشد

معادله دیفرانسیل خطی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ را در نظر بگیرید. اگر y_1 یک پاسخ جواب معادله همگن متناظر باشد، با تغییر متغیر $y = y_1 \int u(x)dx$ و بازنویسی معادله غیرهمگن بالا برحسب u، به یک معادله مرتبه اول برای u به صورت زیر می‌رسیم:

$$u' + \left(P + \frac{2y_1'}{y_1}\right)u = \frac{R}{y_1} \xrightarrow{\text{حل می‌کنیم}} u \longrightarrow y \text{ (جواب عمومی معادله غیرهمگن)}$$

فرمول آبل: برای معادله همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ که y_1 یک پاسخ جواب آن باشد، پاسخ جواب دوم به صورت زیر است:

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx} \longrightarrow y = C_1y_1 + C_2y_2$$

درصورتی که y_1 در صورت سوال ارائه نشود، توابع $y_1 = x$ ، $y_1 = e^{x}$ ، $y_1 = e^{-x}$ ، $y_1 = e^{ax}$ یا $y_1 = ax+b$ را می‌توان به عنوان پاسخ جواب اول حدس زد. درستی یا نادرستی حدس معلوم می‌شود.

Subject:

Date: No:

در این حالت رونسکین y_1 و y_2 برابر است با: $W(y_1,y_2)=Ce^{-\int p(x)dx}$

معادله مرتبه دوم همگن نسبت به تابع:

چنانچه یک تابع نسبت به تابع و مشتقاتش همگن از درجه k باشد، یعنی داشته باشیم: $F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^k F(x,y,y',y'')$ آنگاه با تغییر متغیر $y=e^{\int u(x)dx}$ و در نتیجه $y'=ue^{\int u(x)dx}$

در معادله مذکور، به یک معادله مرتبه اول برای u خواهیم رسید.

معادله مرتبه دوم کامل:

معادله دیفرانسیل $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=R(x)$ کامل است هرگاه $A''(x)-B'(x)+C(x)=0$

در چنین شرایطی، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر به یک معادله مرتبه اول تبدیل نمود:

$$[Ay'+(B-A')y]'=R \Rightarrow \boxed{Ay'+(B-A')y=\int R\,dx}$$

معادلات با ضرائب متغیر که قابل تبدیل به ضرایب ثابت هستند:

معادله روبرو را در نظر بگیرید $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ اگر تغییر متغیر دهیم ← $y=we^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$

$$w''+\left(Q-\tfrac{1}{4}P^2+\tfrac{1}{2}P'\right)w=R(x)\,e^{\frac{1}{2}\int Pdx}$$ ← شکل نرمال

چند رابطه مهم: (ادامه اپراتورها)

$$1)\quad \frac{1}{(D-\alpha)^k F(D)}\{e^{\alpha x}\}=\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{e^{\alpha x}}{F(\alpha)}$$

$$2)\quad \frac{1}{(D-i\beta)^k F(D)}\sin\beta x=\operatorname{Im}\left\{\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{e^{i\beta x}}{F(i\beta)}\right\}$$

$$3)\quad \frac{1}{(D-i\beta)^k F(D)}\cos\beta x=\operatorname{Re}\left\{\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{e^{i\beta x}}{F(i\beta)}\right\}$$

Subject: فصل سوم: حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها:

Date: No:

تابع $f(x)$ در فاصله $|x-x_0|<R$ دارای بسط تیلور است هرگاه در فاصله مذکور بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و این بسط به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n}$$

$$\boxed{a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

a_n از رابطه روبرو استفاده می‌شود:

** تابع $f(x)$ را در نقطه $x=x_0$ تحلیلی گویند هرگاه در این نقطه دارای بسط تیلور باشد. مثلاً

مثلاً تابع $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ در نقطه $x=-1$ تحلیلی نیست اما در نقطه $x=1$ تحلیلی می‌باشد.

نکته 3: معمولاً تحلیلی بودن $f(x)$ در نقطه‌ای مانند $x=x_0$ با وجود حد $\lim_{x\to x_0} f(x)$ معادل است. [illegible]

** بسط‌های مک‌لورن مهم:

1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

2) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

3) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

4) $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

5) $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$

6) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$

7) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots \quad |x|<1$

PONIX NOTE BOOK

Subject:

Date: No:

8) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad |x|<1$

9) $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad |x|<1$

10) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots \qquad |x|<1$

11) $tg^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \qquad |x|<1$

نقاط عادی و نقاط تکین :

در معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ، هرگاه توابع $P(x)$ و $Q(x)$ هر دو در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند، (یعنی دارای بسط تیلور برحسب توان های $(x-x_0)$ باشند) آنگاه این نقطه را یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مذکور گفته و اگر لااقل یکی از توابع P یا Q در نقطه $x=x_0$ تحلیلی نباشد، این نقطه را یک نقطه تکین (منفرد یا غیرعادی) برای معادله دیفرانسیل می نامند. حال اگر $x=x_0$ یک نقطه تکین برای معادله دیفرانسیل فوق باشد، اما در عین حال هر دو تابع $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2Q(x)$ در این نقطه تحلیلی باشند، آنگاه x_0 را یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل مذکور نامیده و در غیر این صورت آن را یک نقطه تکین نامنظم می نامند.

نکته مهم :

محدوده ای از تغییرات x که در آن سری مذکور همگرا است، را فاصله همگرایی سری نام دارد داریم :

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|}<1 \rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ شرط همگرایی

اگر فاصله همگرایی $a<x<b$ باشد $\longrightarrow$ شعاع همگرایی $R=\frac{b-a}{2}$

نکته مهم تر :

$n\to+\infty$: $\sqrt[n]{(an)!}\sim\left(\frac{an}{e}\right)^a$

$n\to+\infty$: $\sqrt[n]{\text{چندجمله‌ای از } n}\sim 1$

PONIX NOTE BOOK

پیدا کردن سری تیلور جواب یک معادله دیفرانسیل حول یک نقطه عادی:

چنانچه $x=x_0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد، آنگاه هر جواب معادله مذکور در $x=x_0$ تحلیلی خواهد بود، یعنی دارای سری تیلوری حول این نقطه با شعاع همگرایی R می‌باشد. پس جواب معادله به صورت زیر است:

$$\boxed{y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n}$$

نکته ۱: اگر در یک معادله دیفرانسیل به همراه شرایط اولیه $y'(x_0)$ و $y(x_0)$، ضریب جمله $(x-x_0)^k$ از بسط جواب این معادله، مورد نظر باشد، می‌توان با قرار دادن $x=x_0$ در معادله دیفرانسیل و مشتقات آن، مقادیر $y''(x_0)$ و $y'''(x_0)$ و ..... و $y^{(n)}(x_0)$ را پیدا نموده و ضریب جمله مورد نظر را از رابطه $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ بدست آورد.

نکته ۲: معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ را در نظر بگیرید. اعتبار سری تیلور جواب این معادله، حول یک نقطه عادی x_0، در داخل فاصله همگرایی این سری می‌باشد. ثابت می‌شود که حداقل شعاع همگرایی سری جواب این معادله برابر با کمترین فاصله نقطه x_0 تا نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل است.

پیدا کردن سری جواب یک معادله دیفرانسیل حول یک نقطه تکین منظم از آن (روش فروبنیوس):

اگر $x=x_0$ یک نقطه تکین منظم برای معادله $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد داریم:

$$\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+r}}$$

r از معادله مشخصه بدست می‌آید:

$$\boxed{r^2+(\alpha-1)r+\beta=0} \rightarrow$$ معادله مشخصه

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) \qquad \beta=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)$$

Subject: Mostafa Rahimi
Year. Month. Date. ( )

حال اگر از معادله مشخصه r_1 و r_2 را بدست آوردیم یک جواب حتماً به صورت زیر است

$$\boxed{y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n} \qquad (a_0 \neq 0)$$

جواب مستقل خطی دیگر به صورت زیر تفکیک می شود:

(الف) تفاضل r_1 و r_2 $\longleftarrow$ غیرصحیح بود

$$\boxed{y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n}$$

(ب) اگر معادله مشخصه ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ داشت:

$$\boxed{y_2 = y_1 \cdot \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n}$$

(ج) اگر تفاضل r_1 و r_2 $\longleftarrow$ صحیح بود:

$$\boxed{y_2 = C y_1 \cdot \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n}$$

Exp $\quad 2x^2 y'' - 3xy' + (x+3)y = 0$

$$\Rightarrow y'' - \frac{3x}{2x^2} y' + \frac{x+3}{2x^2} y = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \lim_{x \to 0} x p(x) = \lim x \times \frac{-3}{2x} = \boxed{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow$$

$$\beta = \lim_{x \to 0} x^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{x+3}{2x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$r^2 + \left(\frac{-3}{2} - 1\right) r + 3/2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r - 3/2) \Rightarrow \boxed{r = 1, 3/2}$

نکته مهم در مورد فصل معادلات درجه دوم:

در معادله دیفرانسیل $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ اگر رونسکین جواب های پایه ای در نقطه ای خاص مانند x_0 داشته باشیم، برای محاسبه رونسکین در سایر نقاط می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\boxed{W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}}$$

رونسکین

جواب های معادله

کنکور ۹۰: اگر در معادله ی $y'' + \frac{2}{x} y' + e^x y = 0$، رونسکین y_1 و y_2 در نقطه $x = 1$ برابر 2 باشد، رونسکین این دو جواب در $x = 5$ چند است؟

$P(x) = \frac{2}{x}$, $W(y_1, y_2)(1) = 2 \Rightarrow W(y_1, y_2)(5) = W(y_1, y_2)(1) e^{-\int_1^5 \frac{2dx}{x}}$

$\Rightarrow 2e^{-2\ln x \big|_1^5} = \boxed{\frac{2}{25}}$

Subject: فصل چهارم: تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن:

Date: . . No:

تعریف اصلی لاپلاس:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}$$

شرط وجود لاپلاس:

اگر $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{at}}$ به ازای یک عدد حقیقی $a>0$ مساوی صفر باشد لاپلاس موجود است.

تابع $f(t)$	تبدیل لاپلاس $F(s)$	
a	$\frac{a}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
t^a	$\frac{a!}{s^{a+1}}$	$a>-1$ و $s>0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>a$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$s>0$

روش هویساید برای تفکیک کسرها:

$$T(s) = \frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)^2} = \frac{A}{s-\alpha} + \frac{B}{s-\beta} + \frac{C}{(s-\beta)^2}$$

$$A = \lim_{s\to\alpha}\left[(s-\alpha)T(s)\right]$$

$$C = \lim_{s\to\beta}\left[(s-\beta)^2 T(s)\right] \qquad B = \lim_{s\to\beta}\frac{d}{ds}\left[(s-\beta)^2 \cdot T(s)\right]$$

Subject:

Date: . . No:

تغییر متغیر مقیاس و (مهم):

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{S}{\alpha}\right)} \xrightarrow{\text{EXP}} \mathcal{L}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = aF(Sa)$$

قضیه مشتق لاپلاس:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = SF(S) - f(0) \quad ✓$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = S^2F(S) - Sf(0) - f'(0) \quad ✓$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = S^nF(S) - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f'(0) - \dots - S^1 f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{S\to +\infty} SF(S) \quad \text{قضیه مقدار اولیه}$$

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{S\to 0} SF(S) \quad \text{قضیه مقدار نهایی}$$

مهم $\rightarrow$ $\boxed{\lim_{S\to +\infty} F(S) = 0}$ $\longrightarrow$ در تمام حالات ممکن

$$\text{if: } \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{S\to \infty} \frac{F(S)}{G(S)} = 1$$

$$\text{if: } \lim_{t\to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1 \Rightarrow \lim_{S\to 0} \frac{F(S)}{G(S)} = 1$$

Subject:

Date: . . No:

نکته جالب: وقتی s به سمت ∞ میل کند:

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{s \to +\infty} sF(s) \\ f'(0) = \lim\limits_{s \to +\infty} s^2F(s) - sf(0) \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس انتگرال تابع:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s)} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(u)\,du$$

EXP $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin r\,dr\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$

قضایای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s) \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -t f(t)$$

مهم $\longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}}$

رابطه کلی

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)}$$

$$* \quad \boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du}$$

PANIX Note Book

No:

قضیه اول انتقال :

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)}$$

Exp $\rightarrow \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}\Big|_{s\to s+2} = \dfrac{s+2}{s^2+4s+13}$

معکوس

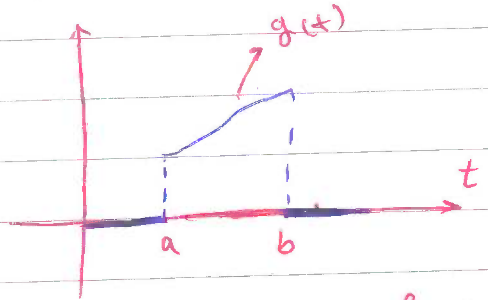
$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)}$$

Exp $\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-5)^3}\right\} = e^{5t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\} = \boxed{e^{5t}\,\dfrac{t^2}{2}}$

تابع پله ای واحد (تابع هوی ساید) :

$$u_a(t) = u(t-a) = H(t-a) = \begin{cases} 0 & t<a \\ 1 & t\geq a \end{cases} \qquad (a\geq 0 \text{ با فرض})$$

در حالت کلی می توانیم چند ضابطه ای بدیم :



یعنی $\Rightarrow$ $[u_a(t) - u_b(t)]\cdot g(t)$ ← در بازه a,b

صفر ← خارج بازه

چند ضابطه ای $\Rightarrow h(t) = \begin{cases} f_1(t) & a<t<b \\ f_2(t) & b<t<c \\ f_3(t) & t>c \end{cases}$

صفر در خارج از بازه‌ها

$$\Rightarrow h(t) = f_1(t)\cdot[u_a(t) - u_b(t)] + f_2(t)[u_b(t) - u_c(t)] + f_3(t)\cdot u_c(t)$$

← اگر چند ضابطه ای نوشته باشد .

قضیه دوم انتقال:

$$\boxed{\mathcal{L}\{u_a(t)\cdot f(t)\} = e^{-as}\cdot \mathcal{L}\{f(t+a)\}}$$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad \checkmark$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\} = u_a(t)\cdot f(t-a) \quad \checkmark$$

$\boxed{\text{EXP}} \rightsquigarrow f(t) = \begin{cases} \sin t & 0<t<2\pi \\ \sin t + \cos t & t \geq 2\pi \end{cases}$

$$f(t) = \sin t\,\{u_0(t) - u_{2\pi}(t)\} + (\sin t + \cos t)\,u_{2\pi}(t) = \sin t\cdot u_0(t) + \cos t\, u_{2\pi}(t)$$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-0s}\mathcal{L}\{\sin(t+0)\} + e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos(t+2\pi)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$= \frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

قضیه تبدیل لاپلاس توابع متناوب:

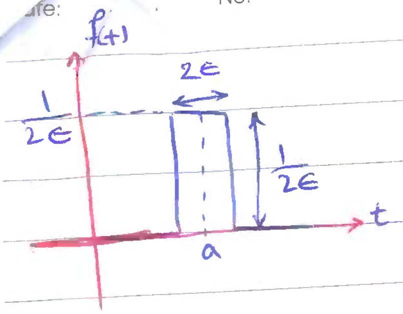
$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-st} f(t)\,dt}$$

P: دوره تناوب

توجه

هر موقع تو تمرین‌ها $1-e^{-as}$ دیدیم باید حل به وسیله‌ی این فرمول بکنیم!!

تابع ضربه، تابع دلتای دیراک:



تابع ضربه $\Rightarrow \delta_\epsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |t-a|<\epsilon \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

حال اگر حد ضربه را $\epsilon \to 0$ مورد بررسی قرار دهیم به حاصل آن $\delta_a(t)$ یا $\delta(t-a)$ می‌گوییم که دلتای دیراک نام دارد:

دلتای دیراک $\delta_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |t-a|<\epsilon \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} = \begin{cases} \infty & t=a \\ 0 & t\neq a \end{cases}$

قضایا:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$$

$$\int_I f(t)\,\delta_a(t)\,dt = f(a)$$ I: هر بازه‌ای که شامل $t=a$ باشد

$$\int_J f(t)\,\delta_a(t)\,dt = 0$$ J: هر بازه‌ای که شامل $t=a$ نشود

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\delta_a(t)\,f(t)\,dt = f(a)\,e^{-sa}}$$

حالت خاص $\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-sa}$, $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

$\boxed{\text{EXP}}$ $\int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta(t-\pi/2)\,\sin t\,dt = e^{-s\pi/2}\cdot \sin\pi/2 = e^{-s\pi/2}$

Subject:

Date: . . No:

پیچش یا کانولوشن دو تابع :

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du}$$

نکته : در پیچش برخلاف ضرب معمولی داریم :

$f*1 \neq f$

$f*f \rightarrow$ لزوماً مثبت نیست

نکته ← $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s).G(s)$

EXP → $1*1 \rightarrow 1*1 = \int_0^t 1\times 1\,du = u\Big|_0^t = \boxed{t}$

EXP → $1*t \rightarrow 1*t = \int_0^t 1\times u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^t = \boxed{\frac{t^2}{2}}$

* در گزینه‌ها به دقت کرد اگر گزینه‌ای یا در صورت سوال انتگرالی مانند انتگرال بالا بود از این روش استفاده شود.

EXP → $\int_0^x e^{x-t}\,y(t)\,dt \rightarrow e^x * y(x)$

حل معادلات انتگرالی :

در این گونه مسائل ابتدا از طرفین تبدیل لاپلاس می‌گیریم و طبق روش‌های قبلی جواب معادله را پیدا می‌کنیم و سپس برای محاسبه‌ی جواب معادله انتگرالی از طرفین $\mathcal{L}^{-1}$ می‌گیریم.

در حل معادلات دیفرانسیل نیز همین کار را انجام می‌دهیم.

مثال حل معادلات دیفرانسیل :

No:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 3 , y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(y'' + 4y = f(t)\right) \Rightarrow s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4Y(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+4)Y(s) - 3s + 1 = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{3s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{F(s)}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}(\sin 2t) * f(t)$$

$$= 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)\, f(x)\, dx$$

PONIX NOTE BOOK

لازم می دانم از جناب آقای مهندس غفاری بابت اسکن خلاصه این درس تشکر ویژه و صمیمانه داشته باشم

اگر این جزوه نقشی در موفقیت شما در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری داشت،

لطفا ما را از دعای خیر خود بی نصیب نگذارید.

با تشکر

مصطفی رحیمی

nce.rahimi@yahoo.com